УДК 711.4 DOI 10.25628/UNIIP.2021.50.3.003

МАЗАЕВ Г. В.

Топологические основы компактности градостроительных структур[1]

В статье на основе научного аппарата топологии, изучающей наиболее общие свойства пространства, рассматривается свойство компактности градостроительных структур. Введено базовое понятие «градостроительное пространство», особые свойства которого создают условия существования компактности. Показана многоуровневость реализации компактности на различных пространственных и планировочных уровнях. Рассмотрены топологические инварианты компактных градостроительных структур, определяющие их гомеоморфность. Сформулированы теоремы компактности градостроительных структур.

Ключевые слова: компактность, градостроительное пространство, топологические инварианты, градостроительные структуры, непрерывное преобразование.

MAZAEV G. V.
TOPOLOGICAL BASIS OF COMPACTNESS OF URBAN STRUCTURES

In the article, on the basis of the scientific apparatus of topology, which studies the most general properties of space, the property of compactness of urban planning structures is considered. The basic concept of «urban planning space» has been introduced, the special properties of which create the conditions for the existence of compactness. Shows the multilevel implementation of compactness at various spatial and planning levels. Topological invariants of compact urban planning structures, which determine their homeomorphism, are considered. Theorems of compactness of urban planning structures are formulated.

Keywords: compactness, urban planning space, topological invariants, urban planning structures, continuous transformation.

Мазаев Григорий Васильевич

кандидат архитектуры, профессор, академик РААСН, главный научный сотрудник, филиал ФГБУ «ЦНИИП Минстроя России» УралНИИпроект, Екатеринбург, Российская Федерация

e-mail: uro-raasn@mail.ru

Компактность — свойство особых типов пространств. Наиболее общие свойства пространства изучает топология — раздел высшей геометрии. Топологическим задачам посвящены труды Л. Эйлера, Н. Стинрода и У. Чинна, отечественных ученых И. М. Яглома [6], П. С. Александрова, Ю. А. Шашкина, Л. С. Понтрягина [5], И. Ц. Гохберг. Основные идеи топологии изложены в работе В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича, вышедшей в 1957 г. и ставшей библиографической редкостью [1], затем они собраны ими в обобщающую работу [2], а также в современной работе В. Тимина [11]. В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович [8] называют топологию «одним из самых абстрактных отделов современной математики». Интересно, что аппарат научных исследований топологии они сравнивают с архитектурой: «Этот абстрактный аппарат можно сравнить с лесами, возведенными для строительства нового здания, совершенно необходимыми, но мешающими легко, непосредственно разглядеть изящество архитектурных форм» [1, *1*].

Градостроители рассматривают формообразование города с функционально-планировочной точки зрения, вне его связи со свойствами пространства (не путать с ландшафтными условиями). Многие понятия, в том числе и компактность, воспринимаются ими как интуитивно понимаемые, но часто не имеющие строго научных определений. Но одно дело не сомневаться в их правильности и даже применять их на практике, и совсем другое — доказать их. С этой целью мы исследуем свойства градостроительных систем на основе понятий топологии.

При помощи теоретических «лесов» топологии можно построить научное представление о компактности градостроительных систем. Ранее мы уже выдвигали концепцию нового раздела теории планировочных систем — градостроительной топологии. Однако методы топологии мы использовали узко — только для объяснения формообразования градостроительных объектов [9]. Сейчас они будут использованы более широко для доказательства определенных свойств планировочных систем и их отдельных элементов.

Аппарат научных исследований топологии и градостроительства различен. Топология оперирует математическими абстрактными понятиями и имеет свой, сложный для понимания, язык. Градостроительная наука исследует ре-

1 Работа выполнена по плану ФНИ РААСН и Минстроя России на 2021 год в соответствии с Государственной программой Российской Федерации «Научно-технологическое развитие Российской Федерации» и Программой фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021–2030 годы).

альные градостроительные объекты, ее язык неустоявшийся, в ней преобладают относительные и сравнительные методы. Но главная идея у них общая — изучение пространства и его свойств: абстрактного математического в топологии, реального физического — в градостроительстве. Эта общность позволит использовать в градостроительных исследованиях научный топологический аппарат, а его высокая абстрактность дает возможность сформулировать наиболее общие принципы образования и развития градостроительных объектов, ввести ряд новых понятий для объяснения их поведения в процессе осуществления и существования.

Пространство

Все объекты — и мыслимые математические, и реальные градостроительные — осуществляются и существуют в особых пространствах.

Математическое пространство — это абстрактная, логически мыслимая форма существования математических объектов: «Это множество, элементы которого (точки) связаны отношениями, сходными с обычными связями в евклидовом пространстве. Это логически мыслимая форма (или структура), служащая средой, в которой осуществляются другие формы и те или иные конструкции» [7]. Это базовое понятие для любого математического построения.

Введем в градостроительную теорию новое понятие. **Градостроительное пространство** — физическое пространство во всей совокупности его факторов, определяющих возможности конструирования, осуществления и трансформации в нем любых градостроительных форм (структур). Градостроительное пространство выступает в двух видах: естественное градостроительное пространство — естественная природная среда, в которой осуществляются градостроительные объекты. Оно овеществляется при создании в нем каких-либо градостроительных объектов. В них возникает второй тип градостроительного пространства — искусственное. Оно формируется искусственными типологическими элементами планировочных структур.

Естественное градостроительное пространство не ограничено, непрерывно (мы не рассматриваем здесь граничные эффекты, как искусственно созданные человеком и не затрагивающие естественную среду) и неравномерно, так как включает зоны с различными свойствами пространства, влияющими на градостроительные структуры. Неравномерность естественного градостроительного пространства во всех ее проявлениях (физических и юридических) определяет «границы непрерывности» для искусственного градостроительного пространства. Поэтому градостроительные структуры ограничены и замкнуты. Именно в их искусственном градостроительном пространстве реализуется свойство компактности. Искусственное градостроительное пространство наследует свойства пространства естественного. В результате их взаимодействия возникает чрезвычайно сложный объект: естественно-искусственная среда, поведение которой определяется как естественными свойствами пространства, так и искусственными закономерностями его построения.

Что общего у этих двух понятий — математического и градостроительного пространства, относящихся к различным научным понятийным аппаратам? Общее — евклидово пространство, в котором действуют законы евклидовой геометрии, оно овеществляется в градостроительстве, становится средой существования градостроительных объектов, определяющей возможности их осуществления. Это аксиома, не нуждающаяся в особых доказательствах, вся градостроительная практика служит ее подтверждением.

Математические множества математического пространства в градостроительном пространстве преобразуются в множество его «точек» — элементов градостроительных структур. Приняв такие допущения о связи математического и градостроительного пространств, можно найти их общие свойства, пользуясь для этого научным аппаратом топологии.

Топологическое определение компактности

Н. Стинрод и У. Чинн приводят определение компактности: «Свойство (пространства. — *Г. М.*) быть замкнутым и ограниченным эквивалентно свойству, называемому компактностью» [7, *62*]. Получилось определение «от обратного», т. е. — компактность пространства — его свойство быть замкнутым и ограниченным. Это определение доказывается ими теоремой: «Каждое компактное подмножество ограничено и замкнуто» [7, *64*]. Похожие определения даются и в других работах: «Компактное пространство — определенный тип топологических пространств, обобщающий свойства ограниченности и замкнутости в евклидовых пространствах» [8]. Из этого следует, что компактные пространства — это определенный тип евклидова градостроительного пространства, но компактность не является свойством любого пространства. Естественное градостроительное пространство непрерывно и не ограничено, поэтому компактность не является его имманентным свойством.

«Топологическое пространство — пространство, в котором рассматриваются свойства непрерывности» [11, *17*]. Идея непрерывности пространства — главная идея топологии как отдела математики: «Свое полное и всестороннее развитие идея непрерывности получает в топологии» [1, *4*]. В ней непрерывность пространства определяется через понятие «окрестность», под которым понимается «любое подмножество пространства, содержащее эту точку в качестве внутренней» [2]. Окрестность может быть двух видов: открытая — не имеющая граничных точек и замкнутая — включающая в себя граничные точки. Применительно к градостроительному пространству это означает, что если окрестность его произвольной точки открытая, то такое пространство некомпактно. Компактное градостроительное пространство должно быть ограниченным и замкнутым. Можно заключить, что компактность — это свойство замкнутых и ограниченных градостроительных пространств, все предельные (граничные) точки которых находятся внутри окрестности и удалены от точки на некоторые фиксированные расстояния. В евклидовом пространстве таким простейшим компактным пространством будет замкнутое и ограниченное окружностью пространство, а простейшая компактная градостроительная структура — круглая форма плана.

Следствием теоремы Н. Стинрода и У. Чинна является теорема о свойствах градостроительного пространства: **естественное градостроительное пространство обладает свойством осуществлять в нем определенный тип замкнутых и ограниченных градостроительных структур — компактных. Компактность не является имманентным свойством любого градостроительного пространства.**

Похожую мысль высказывал И. М. Смоляр, он определял компактность как «...свойство размещения

Иллюстрация 1. Схема осуществления компактных планировочных структур. Автор Г. В. Мазаев

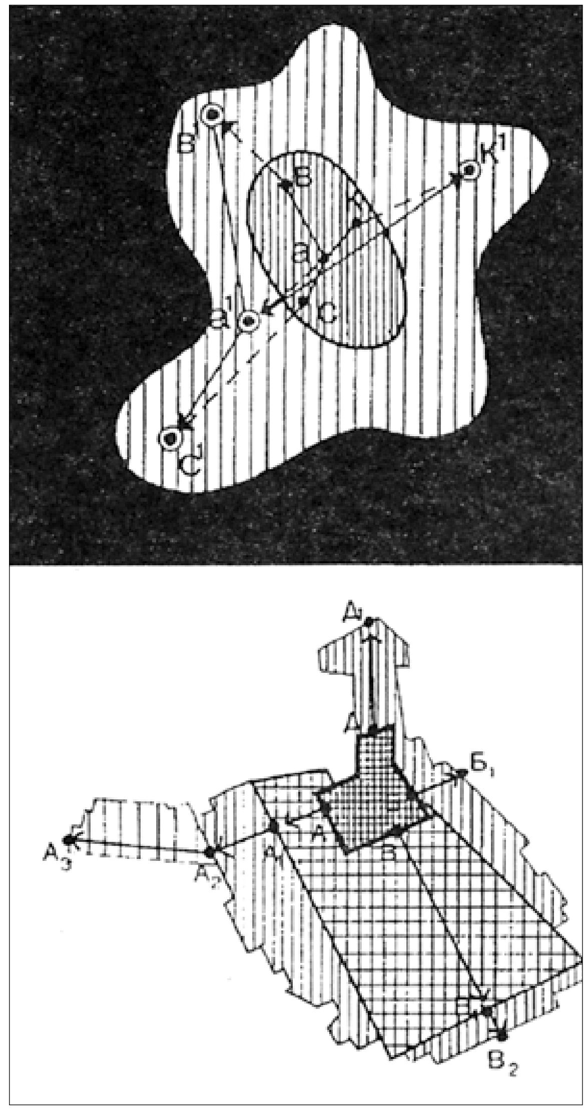

Иллюстрация 2. Непрерывные преобразования в топологии. Автор Г. В. Мазаев. По [10]

и планировочной организации планировочных структур» [8, *101*]. В этом определении компактность является результатом выполнения двух условий: размещения, которое осуществляется в естественном градостроительном пространстве, и организации самой градостроительной структуры в искусственном градостроительном пространстве. Это служит доказательством теоремы многоуровневого осуществления компактности: **компактность — свойство градостроительных объектов, имеющее многоуровневые условия осуществления. Она обязательно должна последовательно осуществляться на пространственном уровне естественного градостроительного пространства и на организационном уровне искусственного градостроительного пространства** (Иллюстрация 1).

Влияние планировки на компактность

Многие компактные города имеют различную планировочную систему: радиально-кольцевую, прямоугольную или произвольную. Исходя из двух уровней осуществления компактности, зададимся вопросом — влияет ли система планировки на компактность всей градостроительной структуры? Будет ли она оставаться компактной или ее свойства изменятся с изменением типа планировки? В математической формулировке эта задача такова: будет ли компактное пространство оставаться компактным при произвольном его делении плоскими графами?

Ответ дает теорема Эйлера и понятие о гомеоморфных преобразованиях, рассматриваемых в топологии [1, *16*]. Топология рассматривает особый вид преобразований пространства — «непрерывные преобразования», происходящие без «разрывов» и «склеек». В них не сохраняются расстояния между точками, а сохраняется только их последовательность и непрерывность расположения (Иллюстрация 2). С позиции топологии, территориальное развитие градостроительных структур — это непрерывное преобразование их формы [9, *51*]. Фигуры, полученные непрерывным преобразованием, рассматриваются как неотличающиеся друг от друга, они могут быть преобразованы одна в другую с сохранением своих свойств. Такие фигуры называются гомеоморфными [1, *8*]. Для доказательства гомеоморфности (или негомеоморфности) фигур используется топологический вариант — характеристика фигуры, которая выражает некоторое ее свойство, сохраняющееся при непрерывных преобразованиях. Если две фигуры имеют одинаковую характеристику — топологический инвариант, то эти фигуры гомеоморфны, т. е. получены непрерывным преобразованием и имеют одинаковые свойства. Следовательно, если любые фигуры, образуемые различными планировками градостроительной структуры и делящие ее компактное пространство, будут гомеоморфны, то будет доказано сохранение свойства его компактности при любом построении планировочной структуры. Ответить на вопрос: изменяется ли компактность пространства при изменении планировочной структуры при условии сохранения формы плана, позволяет топологический инвариант, называемый эйлеровой характеристикой.

Теорема Эйлера утверждает, что эйлерова характеристика не зависит от выбора разбиений поверхности на многоугольники, а определяется свойствами самой поверхности. Для любой сплошной фигуры эйлерова характеристика постоянна и равна 1 (Иллюстрация 3). Если поверхность допускает разбиение на многоугольники и можно нарисовать на ней такой плоский граф, который разбивает ее на конечное число многоугольников (кусков), то число: В – Р + Г = Э, в котором В — число вершин построенного графа; Р — число его ребер; Г — число многоугольников, на которое разбита фигура, называется эйлеровой характеристикой (Э) [1, *19*].

Эйлерова характеристика является топологическим инвариантом. Следовательно, в компактном искусственном градостроительном пространстве любые построения планировки образуют фигуры, имеющие общий топологический инвариант Э = 1, т. е. гомеоморфные фигуры, свойства которых не изменяются. Таким образом, при любом построении планировочной структуры в компактном пространстве характеристика компактности не изменяется. Это служит доказательством теоремы построения компактных планировочных структур: **компактное искусственное градостроительное пространство не меняет своих свойств при любых построениях в нем планировочных структур**. Следствием является гомеоморфность всех компактных планов городов с регулярными формами плана. Поэтому их можно изучать как целостную группу, проводить их сравнение и выделять общие свойства.

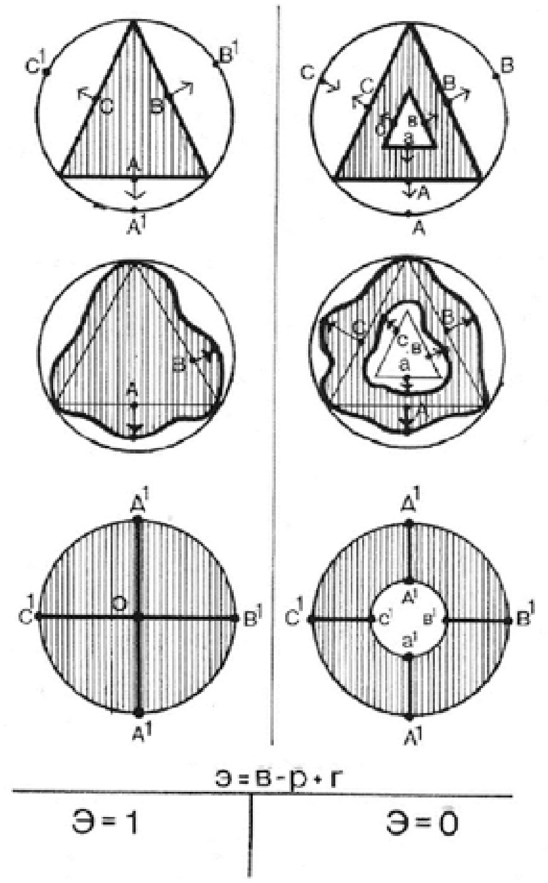

Иллюстрация 3. Топологические инварианты эйлеровой характеристики. Автор Г. В. Мазаев. По [10]

Изменение компактности

Является ли свойство компактности постоянным и сохраняющимся при развитии планировочной структуры? Ответ также дает анализ планов по топологическому инварианту — эйлеровой характеристике. Поверхность, имеющая «дырку», т. е. несплошная, имеет другую эйлерову характеристику. «Вырезание» одной «дырки» уменьшает эйлерову характеристику сплошной поверхности на единицу. Чем больше «дырок» на поверхности, тем больше снижается значение эйлеровой характеристики. То есть, сплошные фигуры и фигуры с «дыркой» будут негомеоморфны, их свойства различны. Топологические сравнения между ними будут невозможны. Из этого следует важный вывод для всей градостроительной теории: города образуют различные группы по формам плана, которые имеют различные эйлеровы характеристики. Планы, входящие в одну группу, гомеоморфны, но различные группы между собой негомеоморфны. Свойства планировок, относящихся к разным группам, различны, следовательно, любые их характеристики будут иметь свои собственные значения и пределы их изменения. Поэтому и характеристики компактности — ее максимальные и минимальные значения — будут различными для каждой топологической группы. Это означает, что исследования и сравнение каких-либо характеристик планов городов должны проводиться в рамках одной топологической группы, т. е. для гомеоморфных форм планов. Только в этом случае будет обеспечена сравнимость показателей. Но являются ли они постоянными?

При территориальном развитии градостроительная структура выходит на новые участки естественного градостроительного пространства. Но оно неравномерно, новые участки территории могут содержать «дырки» — участки, застройка которых невозможна. В этом случае они перейдут в форму плана градостроительной системы — планировку, форма плана (фигура) изменит первоначальную эйлерову характеристику и станет негомеоморфной форме плана предыдущей стадии развития системы. Ее пространственные характеристики изменятся, в том числе компактность, которая снизится. Это доказывает теорему изменчивости компактности: **компактность не является постоянным и неизменным свойством градостроительных структур, в процессе их развития компактность может меняться**. При территориальном росте компактная градостроительная структура может изменить свою форму и становится негомеоморфной форме предшествующей стадии развития. Следствием является связь характеристики компактности со стадией развития планировочной структуры: при экстенсивной стадии компактность, как правило, снижается, при интенсивной возрастает. Другое следствие — компактность может быть постоянной только при условии стабильности планировочной структуры, что характерно для «идеальных городов».

Число компонент градостроительных структур

Эйлерова характеристика не единственный топологический инвариант, позволяющий оценивать гомеоморфность градостроительных систем. Целый ряд городов, расположенных на двух берегах крупных рек, состоят из двух планировочных частей, часто различающихся по планировочной структуре и связанных небольшим числом мостов. Влияет ли такое построение на компактность? Решить этот вопрос можно на основе топологического инварианта, называемого «число компонент». Число компонент компактных структур — число частей, из которых состоит фигура, — является топологическим инвариантом [1, *11*]. Это простейший инвариант, позволяющий быстро оценить гомеоморфность фигур. В градостроительстве — число частей, из которых состоит план градостроительной системы. Гомеоморфные фигуры (планы) состоят из одинакового числа компонент (частей). Планы, состоящие из различного числа компонент, будут иметь различные топологические инварианты и будут негомеоморфны. Их свойства изменятся: градостроительная система, состоящая из нескольких компонент, не будет иметь такую же характеристику компактности, как система, состоящая из одной компоненты — она снизится.

Число компонент плана зависит от свойств естественного градостроительного пространства: оно увеличится, если в процессе территориального роста градостроительная система выйдет на территории, содержащие рассечения, т. е. в несвязное пространство. Свойство связности относится к важным свойствам замкнутых пространств. Н. Стинрод и У. Чинн отмечают: «Пространство, не допускающее никакого разбиения, называется связным» [7, *74*]. Но естественное градостроительное пространство часто содержит множество рассечений различного рода. Сплошная форма плана из одной компоненты будет разбиваться на большее их число, образовавшаяся форма будет иметь другой инвариант, т. е. станет негомеоморфной форме предыдущего этапа развития. Компактность в этом случае будет снижаться. Следовательно, максимально компактная градостроительная структура должна состоять только из одной компоненты, рост числа компонент снижает компактность.

Это служит доказательством теоремы целостности компактной градостроительной структуры: **компактная градостроительная структура состоит из одной компоненты, одной целостной части**. Увеличение числа компонент снижает компактность. Следствием является то, что компактность многокомпонентных градостроительных структур с топологической точки зрения должна рассматриваться отдельно для каждой компоненты — части планировочной системы.

Следует отметить разницу понимания связности в математическом и градостроительных пространствах. В математическом пространстве рассечение однозначно образует фигуры, негомеоморфные целостным, имеющим другой топологический инвариант. В градостроительстве рассечения имеют вполне физический вид: река, овраг, крупные транспортные системы. Но градостроительная система имеет свойство преодолевать их, связывая специальными типологическими элементами рассеченные части структуры. Поэтому рассечение, изменяющее топологические свойства пространства, в градостроительных пространствах должно быть непреодолимым, и чаще всего это крупная река. Но и в этом случае со временем рассечение может быть преодолено, однако связность рассеченных частей будет низкой, обеспечить слияние нескольких компонент в одну невозможно — для этого надо устранить рассечение. Например, заключить реку в коллектор, что чаще всего и случается с малыми реками на территории планировочной системы.

Заключение

Изучая компактность как особое градостроительное явление, мы приходим к выводу, что она является свойством определенного типа естественных градостроительных пространств, создающих условия для ее возникновения, и искусственных градостроительных пространств, в которых она осуществляется в определенных планировочных структурах. Компактность не является их имманентным свойством, она осуществляется на различных пространственных и планировочных уровнях: в естественных градостроительных пространствах, обладающих особым свойством, создающим потенциальную возможность для осуществления компактности; на уровне планировочной системы, осуществляемой в естественном градостроительном пространстве на основе его свойств с соблюдением определенных условий ее пространственной организации; отдельных планировочных элементов градостроительной структуры, которые могут обладать свойством компактности и в некомпактной планировочной системе.

Изучить наиболее общие свойства компактности, условия ее осуществления и существования в градостроительных пространствах возможно, используя научный аппарат топологии, изучающей самые общие свойства пространства, не меняющиеся в результате непрерывных преобразований. На его основе нами сформулированы пять теорем компактности градостроительных структур, так как их положения нуждались в доказательствах, не будучи явным отражением закономерностей, выраженных в «очевидных» правилах.

Список использованной литературы

1 Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Очерк основных идей топологии // Математическое просвещение. — М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1957. — Вып. 2. — С. 1–34.
2 Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1952. — 158 с.
3 Шашкин Ю. А. Эйлерова характеристика. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1984. — 93 с.
4 Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Разбиение фигур на меньшие части. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. — 88 с.
5 Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1973. — 519 с.
6 Яглом И. М. Проблема тринадцати шаров. — Киев: Вища школа, 1975. — 83 с.
7 Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. Геометрия отображения отрезков, кривых, окружностей и кругов: пер. с англ. — М.: Мир, 1967. — 223 с.
8 Смоляр И. М. Терминологический словарь по градостроительству / РААСН. — М.: РОХОС, 2004. — 160 с.
9 Мазаев Г. В. Прогнозирование вероятностного развития градостроительных систем: учеб. пособие. — Екатеринбург: УралГАХА, 2005. — 112 с.
10 Мазаев Г. В. Развитие градостроительных структур на примере городов Свердловской области. Екатеринбург // Изв. вузов. Architecton. — 2002. — № 2. — С. 23–29.
11 Тимин В. Что за зверь — топологическое пространство. — URL: https://zen.yandex.ru/media/

id/5e036c95fc69ab00aecfe6e9/2-chto-za-zver-topo-logicheskoe-prostranstvo-5fa7049f1aeb58326c3742ed (дата обращения: 26.05.2021).

References

1 Boltyanskij V. G., Efremovich V. A. Ocherk osnovnyh idej topologii // Matematicheskoe prosveshchenie. — M.: Gos. izd-vo tekhniko-teoret. lit., 1957. — Vyp. 2. — S. 1–34.
2 Boltyanskij V. G., Efremovich V. A. Naglyadnaya tipologiya. — M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit., 1952. — 158 s.
3 Shashkin Yu. A. Ejlerova harakteristika. — M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit., 1984. — 93 s.
4 Boltyanskij V. G., Gohberg I. C. Razbienie figur na men'shie chasti. — M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit., 1971. — 88 s.
5 Pontryagin L. S. Nepreryvnye gruppy. — M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit., 1973. — 519 s.
6 Yaglom I. M. Problema trinadcati sharov. — Kiev: Vishcha shkola, 1975. — 83 s.
7 Stinrod N., Chinn U. Pervye ponyatiya topologii. Geometriya otobrazheniya otrezkov, krivyh, okruzhnostej i krugov: per. s angl. — M.: Mir, 1967. — 223 s.
8 Smolyar I. M. Terminologicheskij slovar' po gradostroitel'stvu / RAASN. — M.: ROHOS, 2004. — 160 s.
9 Mazaev G. V. Prognozirovanie veroyatnostnogo razvitiya gradostroitel'nyh sistem: ucheb. posobie. — Ekaterinburg: UralGAHA, 2005. — 112 s.
10 Mazaev G. V. Razvitie gradostroitel'nyh struktur na primere gorodov Sverdlovskoj oblasti. Ekaterinburg // Izv. vuzov. Architecton. — 2002. — № 2. — S. 23–29.
11 Timin V. Chto za zver' — topologicheskoe prostranstvo. — URL: https://zen.yandex.ru/media/id/5e036c95fc69ab00aecfe6e9/2-chto-za-zver-topo-logicheskoe-prostranstvo-5fa7049f1aeb58326c3742ed (data obrashcheniya: 26.05.2021).

Статья поступила в редакцию 19 июля 2021 г.
Опубликована в сентябре 2021 г.

Gregory Mazaev
Candidate of Architecture, Full Professor, Academician of RAASN, Chief researcher, Branch FSBI «TsNIIP Minstroy Russia» UralNIIproekt, Yekaterinburg, Russian Federation
e-mail: uro-raasn@mail.ru
ORCID ID: 0000-0003-3353-7552